УДК 517.925.51

К. С. Лапин

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ С ЧАСТИЧНО КОНТРОЛИРУЕМЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Актуальность и цель исследования: японским математиком Т. Йосидзавой было дано развитие теории различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений. При исследовании ограниченности решений он использовал метод, который в своей сущности аналогичен прямому методу Ляпунова в теории устойчивости. Исследования различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных и, в частности, равномерной ограниченности решений по части переменных впервые были проведены В. В. Румянцевым и А. С. Озиранером. С другой стороны, В. И. Воротниковым и Ю. Г. Мартышенко было разработано новое направление в теории частичной устойчивости, а именно была развита теория частичной устойчивости положения равновесия, у которого часть координат контролируется. Таким образом, возникает интересная идея создания в теории частичной ограниченности решений методов, которые были бы в идейном плане аналогичны методам указанной выше теории устойчивости по части переменных частичного положения равновесия. Основным методом исследования является метод функций Ляпунова. Теоремы в данной работе сформулированы и доказаны в терминах производной Дини. Введено понятие равномерной и тотальной ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Получен критерий равномерной ограниченности и достаточный признак тотальной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Полученные в данной статье результаты могут применяться в исследовании реальных процессов на различные виды частичной ограниченности в естественно-технических задачах.

Ключевые слова: ограниченность решений, ограниченность по части переменных, функция Ляпунова, частично контролируемые начальные условия.

K. S. Lapin

UNIFORM BOUNDEDNESS OF DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM SOLUTIONS RELATING TO VARIABLES WITH PARTIALLY CONTROLLED INITIAL CONDITIONS

Abstract. Background. Japanese mathematician T. Yoshizawa developed the theory of various types of boundedness of solutions of systems of differential equations. In the investigation of boundedness of solutions he used a method which is similar to the direct method of Lyapunov in the stability theory. Research of different types of boundedness of solutions of systems of differential equations with respect to variables and, in particular, of the uniform boundedness of solutions with respect to variables were first carried out by V. V. Rumyantsev and A. S. Oziraner. On the other hand, V. I. Vorotnikov and Yu. G Martyshenko developed a new direction in the theory of partial stability, namely, the theory of partial stability of the equilibrium position with a controlled part of the coordinates. Thus, there is an interesting idea to create in the theory of partial boundedness of solutions the methods that would be conceptually similar to those of the above-mentioned theory of the stability with respect to a part of the variables of partial equilibrium positions. The main research method in this paper is the method of Lyapunov functions. All the main theorems in this paper are stated and proved in terms of the Dini derivative. The author introduces the concept of the partial uniform boundedness of solutions of systems of differential equations with partially controlled initial conditions. The researcher obtains a criterion of the partial uniform boundedness of solutions with partially controlled initial conditions and a sufficient condition for partial total boundedness. The results obtained in this paper can be applied in research of real processes to different types of partial boundedness in the natural and technical problems.

Key words: boundedness of solutions, partial boundedness, Liapunov's function, partially controlled initial conditions.

Введение

В классической работе Т. Йосидзавы [1] была развита теория различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений. Основным средством исследования ограниченности решений в работе [1] является метод, который в своей сущности аналогичен прямому методу Ляпунова в теории устойчивости. Исследования различных видов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных и, в частности, равномерной ограниченности решений по части переменных, впервые были проведены В. В. Румянцевым и А. С. Озиранером [2]. С другой стороны, В. И. Воротниковым и Ю. Г. Мартышенко [3] было разработано новое направление в теории устойчивости по Ляпунову относительно части переменных, а именно в [3] была развита теория частичной устойчивости положения равновесия, у которого часть координат контролируется. В связи с этим возникает интересный вопрос о возможности создания в теории ограниченности решений по части переменных методов, которые были бы в идейном плане аналогичны методам указанной выше теории устойчивости по части переменных частичного положения равновесия.

В данной работе введено понятие равномерной ограниченности решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Это новое понятие является в идейном плане родственным понятию равномерной устойчивости относительно части переменных частичного положения равновесия из работы [3]. В терминах производной Дини получен критерий равномерной ограниченности решений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. Проведено сравнение этого критерия с критерием равномерной ограниченности решений систем по части переменных [2]. Далее в работе введено понятие тотальной ограниченности (или, по-другому, ограниченности при постоянно действующих возмущениях систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. В терминах производной Дини получен достаточный признак тотальной ограниченности решений систем по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями.

1. Критерий равномерной *y*-ограниченности решений систем дифференциальных уравнений с y_0-контролем

Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений от n переменных

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x)\,,\; F(t,x) = (F^1(t,x),...,F^n(t,x)), \tag{1}$$

правая часть которой задана и непрерывна в области $\Omega = \{(t,x) \in R^+ \times R^n\}$, где $R^+ = \{t \in R \mid t \ge 0\}$. Предполагается, что каждое решение системы (1) продолжимо на всю полуось R^+.

Далее под $\|\cdot\|$ везде будем понимать обычную евклидову норму. Для каждого $x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$ и любого фиксированного числа k, $1 \le k \le n$, будем использовать обозначения $y = (x_1,...,x_k) \in R^k$ и $z = (x_{k+1},...,x_n) \in R^{n-k}$.

Определение 1 [2]. Говорят, что решения системы (1) равномерно ограничены по части переменных $y = (x_1,...,x_k)$, или, более кратко, равномерно y-ограничены, если для каждого неотрицательного числа $\alpha \in R$ существует такое положительное число $\beta(\alpha) \in R$, что для любой точки $(t_0,x_0) \in \Omega$, $\|x_0\| \le \alpha$, выполнено условие $\|y(t,x_0,t_0)\| < \beta$ при $t \ge t_0$, где $x = x(t,x_0,t_0)$ – произвольное решение системы (1), проходящее через точку (t_0,x_0).

Легко видеть, что на геометрическом языке равномерная y-ограниченность решений системы (1) означает, что решения этой системы, стартующие в произвольный момент времени из точек n-мерного шара $B_n(O,\alpha)$ радиуса α с центром в начале системы координат $O \in R^n$, будут во все последующие моменты времени находиться в n-мерном полном бесконечном цилиндре $B_k(O,\beta(\alpha)) \times R^{n-k}$, радиус сечения которого $\beta(\alpha)$ не зависит от момента времени старта решений.

Определение 2. Будем говорить, что решения системы (1) равномерно ограничены по части переменных $y = (x_1,...,x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0 = ((x_0)_1,...,(x_0)_k)$, или, более кратко, равномерно y-ограничены с y_0-контролем, если для каждого неотрицательного числа $\alpha \in R$ существует такое положительное число $\beta(\alpha) \in R$, что для любой точки $(t_0,x_0) \in \Omega$, $\|y_0\| \le \alpha$ выполнено условие $\|y(t,x_0,t_0)\| < \beta$ при $t \ge t_0$, где $x = x(t,x_0,t_0)$ – произвольное решение системы (1), проходящее через точку (t_0,x_0).

На геометрическом языке, по сравнению с определением равномерной y-ограниченности, равномерная y-ограниченность с y_0-контролем решений системы (1) означает, что решения этой системы, стартующие в произвольный момент времени из точек n-мерного полного бесконечного цилиндра

$B_k(O,\alpha)\times R^{n-k}$ радиуса сечения α, будут во все последующие моменты времени находиться в n-мерном полном бесконечном цилиндре $B_k(O,\beta(\alpha))\times R^{n-k}$, радиус сечения которого $\beta(\alpha)$ не зависит от момента времени старта решений.

Таким образом, различие понятий равномерной y-ограниченности и равномерной ограниченности с y_0-контролем заключается в том, что при исследовании решений системы на равномерную y-ограниченность интересуются всеми координатами точек, из которых стартуют решения, а при исследовании решений на равномерную y-ограниченность с y_0-контролем интерес представляет лишь контролируемая часть точек старта решений.

Ясно, что если решения системы (1) равномерно y-ограничены с y_0-контролем, то решения этой системы являются и просто равномерно y-ограниченными, поскольку множество $B_\alpha^n=\{x\in R^n:\|x\|\le\alpha\}$ является подмножеством множества $B_\alpha^k\times R^{n-k}=\{x\in R^n:\|y\|\le\alpha\}$. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. из равномерной y-ограниченности решений системы (1), вообще говоря, не следует равномерная y-ограниченность с y_0-контролем решений этой системы.

Напомним теперь [1], что производной Дини функции $G(t,x)$ в силу системы (1) называется функция $G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$, которая определяется следующей формулой:

$$G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)=\lim_{\alpha\to+0}\left(\sup_{h\in(0;\alpha]}\frac{G(t+h,x+F(t,x)h-G(t,x)}{h}\right). \tag{2}$$

Легко видеть, что для любой фиксированной точки (t,x) указанный выше предел существует всегда, но может обращаться в бесконечность. Поэтому условие существования производной Дини $G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$ в силу системы (1) как функции от (t,x) со значениями в R равносильно условию не обращения в бесконечность данного предела (2) для любой точки (t,x).

Для функции $G(t,x)$, заданной в некоторой области $E\subseteq\{(t,x)\in R^+\times R^n\}$, будем употреблять запись $G(t,x)\in L(t,x)$, если для любого ограниченного подмножества $B\subset E$, замыкание которого принадлежит E, выполнено условие Липшица по переменным t и x, т.е. существует такая постоянная Липшица L, зависящая от B, что для любых точек $(t,x),(t',x')\in B$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|G(t,x)-G(t',x')\right|\le L\left(\left|t-t'\right|+\left|x-x'\right|\right).$$

В случае, когда функция $G(t,x)$ имеет непрерывные частные производные по переменным $t,x_1,\dots,x_n$ (соответственно по переменным $x_1,\dots,x_n$), будем употреблять запись $G(t,x)\in D(t,x)$ (соответственно запись $G(t,x)\in D(x)$).

Отметим, что если $G(t,x) \in L(t,x)$, то производная Дини существует как функция со значениями в R, т.е. функция $G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$ не обращается в бесконечность ни в одной точке из области своего определения. Действительно, так как $G(t,x) \in L(t,x)$ и $|F(t,x)| < +\infty$, для любой точки получаем

$$\left|G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)\right| \le \lim_{\alpha \to +0}\left(\sup_{h \in (0;\alpha]} \frac{|G(t+h, x+V(t,x)h - G(t,x)|}{h}\right) \le$$

$$\le \lim_{\alpha \to +0}\left(\sup_{h \in (0;\alpha]} \frac{L(h+|V(t,x)|h)}{h}\right) = L\left(1+|V(t,x)|\right) < \infty .$$

Напомним утверждение из работы [1], которое связывает верхнюю производную Дини $G'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$ с решениями системы (1).

Теорема 1. Для произвольной функции $G(t,x) \in L(t,x)$, $t \ge 0$, $x \in R^n$, условие $G'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \le 0$ выполнено тогда и только тогда, когда для любого решения $x = x(t)$ системы (1) функция $G(t,x(t))$ от переменной t является невозрастающей.

Сформулируем и докажем теперь достаточный признак равномерной y-ограниченности с y_0-контролем системы (1) в терминах производной Дини.

Теорема 2. Пусть для системы (1) имеется неотрицательная функция $V(t,x)$, определенная в области $t \ge 0$, $x = (y,z) \in R^n$, $y \in R^k$, $\|y\| \ge R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, для которой выполнены следующие условия:

1) $b(\|y\|) \le V(t,x) \le a(\|y\|)$, где $a(r) > 0$ и $b(r) \ge 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$;

2) $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \le 0$ внутри области $t \ge 0$, $x \in R^n$, $|y| \ge R_0$.

Тогда решения системы (1) равномерно y-ограничены с y_0-контролем.

Доказательство. Требуется доказать, что для каждого $\alpha > 0$ существует такое число $\beta(\alpha) > 0$, что для любых $t \ge 0$, $x \in R^n$, $\|y_0\| \le \alpha$ выполнено условие $\|y(t,x_0,t_0)\| < \beta$ при всех $t \ge t_0$. Сразу отметим, что без ограничения общности доказательство достаточно провести только для тех решений $x = x(t,x_0,t_0)$, которые при $\|y_0\| \ge R_0$ удовлетворяют условию $\|y(t,x_0,t_0)\| \ge R_0$, и для тех $\alpha > 0$, которые удовлетворяют условию $\alpha > R_0$. Приступим теперь к доказательству. Пользуясь условием 1 из формулировки доказываемой теоремы, получаем, что для любого решения $x = x(t,x_0,t_0)$ системы (1) имеет место неравенство $b(\| y(t,x_0,t_0 \|) \le V(t,x(t,x_0,t_0))$. Из условия 2 доказываемой теоремы следует, что для любого решения $x = x(t,x_0,t_0)$ системы (1) функция $V(t,x(t,x_0,t_0))$ от переменной t является невозрастающей. Из этого при $t \ge t_0$ получаем неравенство $V(t, x(t, x_0, t_0)) \le V(t_0, x_0)$. Так как при $\|y_0\| \le \alpha$ справедливо неравенство $V(t_0, x_0) \le a(\alpha)$, то имеем неравенства:

$$b(\|y(t, x_0, t_0)\|) \le V(t, x(t, x_0, t_0)) \le V(t_0, x_0) \le a(\alpha) .$$

Пользуясь теперь условием $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, выберем такое число β, которое зависит от α, но не зависит от t_0, что $a(\alpha) < b(\beta)$. Из этого получаем неравенство $b(\|y(t, x_0, t_0)\|) < b(\beta)$. Так как функция $b(r)$ является непрерывной и возрастающей, то для этой функции имеется обратная функция, которая также является возрастающей. Применяя эту обратную функцию к неравенству $b(\|y(t, x_0, t_0)\|) < b(\beta)$, получим неравенство $\|y(t, x_0, t_0)\| < \beta$. Таким образом, показано, что решения системы (1) равномерно y-ограничены с y_0-контролем. Теорема доказана.

Отметим, что если $V(t, x) \in D(t, x)$, то $V'^{+}_{F(t,x)}(t, x)$ совпадает с обычной производной функции $V(t, x)$ в силу систем (1).

Сформулируем и докажем теперь необходимый признак равномерной y-ограниченности с y_0-контролем решений системы (1) в терминах производной Дини.

Теорема 3. Пусть для правой части $F(t, x)$ системы (1) выполнено условие $F(t, x) \in D(x)$ и решения системы (1) равномерно y-ограничены с y_0-контролем. Тогда в области $t \ge 0$, $x = (y, z) \in R^n, y \in R^k$, $\|y\| \ge R_0 = \beta(0)$, где $\beta(\alpha)$ – функция из определения 2, имеется неотрицательная функция $V(t, x) \in L(t, x)$, обладающая следующими свойствами:

1) $b(\|y\|) \le V(t, x) \le a(\|y\|)$, где $a(r) > 0$ и $b(r) \ge 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$;

2) $V'^{+}_{F(t,x)}(t, x) \le 0$ внутри области $t \ge 0$, $x \in R^n$, $\|y\| \ge R_0$.

Доказательство. Определим сначала функцию $V(t, x)$. Рассмотрим на отрезке $0 \le \tau \le t$ произвольное решение $x = x(\tau, x, t)$ системы (1). Так как решение $x = x(\tau, x, t)$ продолжимо на всю полуось $\tau \ge 0$, то оно определяет функцию $\|y(\tau, x, t)\|^2$, которая непрерывна при изменении τ от $\tau = t$ до $\tau = 0$. Определим в области $t \ge 0$, $x \in R^n$ неотрицательную функцию $V(t, x)$, полагая

$$V(t, x) = \min_{\tau}\{\|y(\tau, x, t)\|^2 : 0 \le \tau \le t\} .$$

Проверим, что функция $V(t, x)$ обладает свойством 1. Из определения функции $V(t, x)$ видно, что $V(t, x) \le \|y\|^2$. Таким образом, если в качестве функции $a(r)$ взять функцию $a(r) = r^2$, то получим $V(t, x) \le a(\|y\|)$. По определению равномерной y-ограниченности с y_0-контролем решений имеем $\|y(t,x_0,t_0)\| < \beta(\alpha)$ при $\|y_0\| \le \alpha$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta(\alpha)$ является непрерывной возрастающей функцией от α. В самом деле, если это не так, то функцию $\beta(\alpha)$ всегда можно заменить непрерывной возрастающей функцией $\gamma(\alpha)$, для которой выполнено условие $\beta(\alpha) \le \gamma(\alpha)$. Итак, будем считать, что функция $\beta(\alpha)$ является непрерывной возрастающей функцией от α. Из неравенства $\|y(t,x_0,t_0)\| < \beta(\alpha)$ при $\|y_0\| \le \alpha$, где $\beta(\alpha)$ – непрерывная возрастающая функция от α, получаем неравенство $\|y(t,x_0,t_0)\|^2 < (\beta(\alpha))^2$. Очевидно, что $(\beta(\alpha))^2$ – непрерывная возрастающая функция от α. Обратная функция $\xi(r) \ge 0$ к функции $(\beta(\alpha))^2$ определена на множестве $r \ge (\beta(0))^2$. При помощи функции $\xi(r)$ из неравенства $\|y(t,x_0,t_0)\|^2 < (\beta(\alpha))^2$ получаем для каждого $\|\acute{o}\|^2 \ge (\beta(0))^2$ неравенство $\xi(\|y\|^2) \le V(t,x)$. Если теперь в качестве $b(r) \ge 0$ взять функцию $\xi(r^2)$, которая определена при $r \ge R_0$, где $R_0 = \beta(0)$, то для каждого $x \in R^n$, $\|y\| \ge R_0$ получим неравенство $b(\|y\|) \le V(t,x)$. Ясно, что функция $b(r)$ является возрастающей и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Также ясно, что полученное выше для любого $x \in R^n$ неравенство $V(t,x) \le a(\|y\|)$ является справедливым и для каждого $\|y\| \ge R_0$. Очевидно, что $a(r) = r^2 > 0$ при $r \ge R_0$. Таким образом, проверка того, что неотрицательная функция $V(t,x)$, рассматриваемая в области $t \ge 0$, $x \in R^n$, $\|y\| \ge R_0$, обладает свойством 1, завершена.

Для доказательства справедливости условия $V(t,x) \in L(t,x)$ заметим сначала, что для произвольной точки (t,x) из области определения функции $V(t,x)$ найдется такое $0 \le \tau' \le t$, что имеет место равенство $V(t,x) = \|y(\tau',t,x)\|^2$. Действительно, в силу компактности отрезка $[0;t]$ и непрерывности функции $\|y(\tau',t,x)\|^2$ на этом отрезке, такое $0 \le \tau' \le t$ всегда существует. Покажем теперь, что $V(t,x) \in L(t,x)$. Рассмотрим сначала разность $V(t,x) - V(t,x')$. Пусть $V(t,x') = \|y(\tau_1,x',t)\|^2$. Тогда имеем

$$V(t,x) - V(t,x') \le \|y(\tau_1,x,t)\|^2 - \|y(\tau_1,x',t)\|^2 \le A|x - x'|.$$

Здесь A – некоторая константа в δ-окрестности $U(P,\delta)$ точки $P = (t,x)$, где $(t,x') \in U(P,\delta)$, определяемая условием существования непрерывных частных производных функции $\|y(\tau,x,t)\|^2$ по переменным $x_1,\ldots,x_n$ в этой окрестности. Пусть теперь $V(t,x) = \|y(\tau_2,x,t)\|^2$. Тогда имеем

$$V(t,x) - V(t,x') \ge \|y(\tau_2,x,t)\|^2 - \|y(\tau_2,x',t)\|^2 \ge -A|x - x'|.$$

Таким образом, в окрестности $U(P,\delta)$ точки $P=(t,x)$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|V(t,x)-V(t,x')\right| \le A\left|x-x'\right|. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим $V(t,x)-V(t',x)$ при $t<t'$. Пусть $V(t',x)=\left\|y(\tau',x,t')\right\|^2$, где $0\le\tau'\le t$. Тогда имеем

$$V(t,x)-V(t',x)\le\left\|y(\tau',x,t)\right\|^2-\left\|x(\tau',x,t')\right\|^2=$$

$$=\left\|y(\tau',x,t)\right\|^2-\left\|y(\tau',X,t)\right\|^2\le A\left|x-X\right|\le C_1\left|t-t'\right|,$$

где $X=x(t,x,t')$. Здесь C_1 – некоторая константа в δ-окрестности $U(P,\delta)$ точки $P=(t,x)$, где $(t',x)\in U(P,\delta)$, определяемая условием непрерывной дифференцируемости функции $\left\|y(\tau,x,t)\right\|^2$ по переменной t в этой окрестности. Аналогично получаем неравенство $V(t,x)-V(t',x)\ge -C_1\left|t-t'\right|$. Пусть теперь $V(t,x)=\left\|y(\tau'',x,t)\right\|$ и равенство $V(t',x)=\left\|y(\tau',x,t')\right\|^2$ выполнено при $t<\tau'\le t'$. Тогда имеем

$$V(t,x)-V(t',x)=\left\|y(\tau'',x,t)\right\|^2-\left\|y(\tau',x,t')\right\|^2\le\left\|y(t,x,t)\right\|^2-\left\|y(t,x,t')\right\|^2+$$

$$+\left\|y(t,x,t')\right\|^2-\left\|y(\tau',x,t')\right\|^2\le A\left|x-X\right|+C_2\left|t-\tau'\right|\le C_1\left|t-t'\right|+C_2\left|t-t'\right|=C\left|t-t'\right|,$$

где $C=C_1+C_2$; C_2 – некоторая константа, определяемая условием непрерывной дифференцируемости функции $\left\|y(t,x,t')\right\|$ по переменной t.

Аналогично получаем, что $V(t,x)-V(t',x)\ge -C\left|t-t'\right|$. Итак, в окрестности $U(P,\delta)$ точки $P=(t,x)$ справедливо следующее неравенство:

$$V(t,x)-V(t',x)\le C\left|t-t'\right|. \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) в окрестности $U(P,\delta)$ точки $P=(t,x)$ получаем

$$\left|V(t,x)-V(t',x')\right|=\left|V(t,x)-V(t',x)+V(t',x)-V(t',x')\right|\le$$

$$\le C\left|t-t'\right|+A\left|x-x'\right|\le L(\left|t-t'\right|+\left|x-x'\right|),$$

где $L=\max(C,A)$.

Таким образом, доказано, что $V(t,x)\in L(t,x)$. Из этого, как было показано выше, следует, что для функции $V(t,x)$ внутри области $t\ge 0$, $x\in R^n$ существует производная Дини $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$ в силу системы (1).

Докажем теперь, что $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x)\le 0$ внутри области $t\ge 0$, $x\in R^n$. Для этого заметим сначала, что для любого решения $x=x(t)$ системы (1), проходящего через точку (t_0,x_0), функция $V(t,x(t))$ является невозрастающей. В самом деле, пусть заданы произвольные $0\le t_1<t_2$. Тогда имеем

$$V(t,x(t_1)) = \min_{0\le\tau\le t_1} \|y(\tau,x(t_1),t_1)\| \ge \min_{0\le\tau\le t_2} \|y(\tau,x(t_2),t_2)\| = V(t_2,x(t_2)).$$

Применяя теперь к функции $V(t,x)$ теорему 1, получаем, что $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \le 0$ внутри области $t \ge 0$, $x \in R^n$. Таким образом, проверка того, что неотрицательная функция $V(t,x)$, рассматриваемая в данной области, обладает свойством 2, завершена.

Объединяя теперь утверждения теорем 2 и 3, получаем следующий критерий равномерной y-ограниченности с y_0-контролем решений системы (1) в терминах производной Дини.

Теорема 4 (Критерий равномерной y-ограниченности с y_0-контролем решений систем дифференциальных уравнений). Для того чтобы решения системы (1), где $F(t,x) \in D(x)$, были равномерно y-ограничены с y_0-контролем, необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t,x) \in L(t,x)$, определенной в области $t \ge 0$, $x = (y,z) \in R^n$, $y \in R^k$, $\|y\| \ge R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, которая обладает следующими свойствами:

1) $b(\|y\|) \le V(t,x) \le a(\|y\|)$, где $a(r) > 0$ и $b(r) \ge 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$;

2) $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \le 0$ внутри области $t \ge 0$, $x \in R^n$, $\|y\| \ge R_0$.

Проведем теперь сравнение полученного выше критерия со следующим критерием равномерной y-ограниченности из работы [2].

Теорема 5 (Критерий равномерной y-ограниченности решений систем дифференциальных уравнений). Для того чтобы решения системы (1) были равномерно y-ограничены, необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t,x)$, определенной в области $t \ge 0$, $x \in R^n$, $\|y\| \ge R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, которая обладает следующими свойствами:

1) $b(\|y\|) \le V(t,x) \le a(\|x\|)$, где $x = (y,z) \in R^k \times R^{n-k}$, $a(r) > 0$ и $b(r) \ge 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$;

2) для любого решения $x = x(t)$ системы (1), удовлетворяющего условию $\|y(t)\| \ge R_0$, функция $V(t,x(t))$ является невозрастающей.

Представляется важным указать на то, что в работе [2] не рассматривался вопрос о том, можно ли выбрать функцию $V(t,x)$ в теореме 5 так, чтобы она удовлетворяла условию Липшица $V(t,x) \in L(t,x)$. Если рассмотреть этот вопрос, то можно показать, что при выполнении условия $F(t,x) \in D(x)$ ответ на него положительный. Действительно, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3, доказывается, что функцию $V(t,x)$ в теореме 5 можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условию $V(t,x) \in L(t,x)$, из которого вытекает существование $V'_{F(t,x)}(t,x)$. Как следствие получаем утверждение, которое уточняет теорему 5.

Теорема 6. Для того чтобы решения системы (1), где $F(t,x) \in D(x)$, были равномерно *y*-ограничены, необходимо и достаточно существование неотрицательной функции $V(t,x)$, определенной в области $t \geq 0$, $x \in R^n$, $\|y\| \geq R_0$, где $R_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, которая обладает следующими свойствами:

1) $b(\|y\|) \leq V(t,x) \leq a(\|x\|)$, где $x = (y,z) \in R^k \times R^{n-k}$, $a(r) > 0$ и $b(r) \geq 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$;

2) $V'_{F(t,x)}(t,x) \leq 0$ внутри области $t \geq 0$, $x \in R^n$, $\|y\| \geq R_0$.

Сравнивая теперь теоремы 4 и 6, а также пользуясь очевидным неравенством $\|y\| \leq \|x\|$, получаем следующее утверждение, которое устанавливает связь между равномерной *y*-ограниченностью решений системы (1) и равномерной *y*-ограниченностью с y_0-контролем решений этой системы.

Следствие 1. Пусть решения системы (1), где $F(t,x) \in D(x)$, равномерно *y*-ограничены. Решения этой системы будут равномерно *y*-ограничены с y_0-контролем тогда и только тогда, когда функцию $V(t,x)$ из теоремы 6 можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условию $V(t,x) \leq a(\|y\|)$, где $a(r) > 0$ – некоторая непрерывная возрастающая функция.

2. Достаточное условие тотальной *y*-ограниченности решений систем дифференциальных уравнений с y_0-контролем

Введем теперь понятие тотальной ограниченности (или, по-другому, ограниченности при постоянно действующих возмущениях) решений системы (1) по части переменных с контролируемой частью начальных условий. Пусть вместе с системой (1) задана еще одна система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + H(t,x), \quad H(t,x) = (H_1(t,x),\ldots,H_n(t,x)), \tag{5}$$

где $F(t,x)$ – правая часть системы (1) и $H(t,x)$ – переменное векторное поле в R^n, называемое возмущением системы (1), которое является определенным и непрерывным в области $\Omega = \{(t,x) \in R^+ \times R^n\}$. Далее везде будет предполагаться, что все решения системы (5), проходящие через произвольную точку (t_0, x_0), продолжимы на всю полуось $t \geq t_0$.

Систему (5) удобно для последующих рассмотрений записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Y(t,y,z) + M(t,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = Z(t,y,z) + N(t,y,z), \end{cases}$$

где $x = (y,z) \in R^n = R^k \times R^{n-k}$, $1 \leq k \leq n$, и

$$Y(t,y,z)=(F_1(t,x),\dots,F_k(t,x)),$$

$$Z(t,y,z)=(F_{k+1}(t,x),\dots,F_n(t,x)),$$

$$M(t,y,z)=(H_1(t,x),\dots,H_k(t,x)),$$

$$N(t,y,z)=(H_{k+1}(t,x),\dots,H_n(t,x)).$$

Определение 3. Будем говорить, что решения системы (1) тотально ограничены по части переменных $y=(x_1,...,x_k)$ с контролируемой частью начальных условий $y_0=((x_0)_1,...,(x_0)_k)$, или, более кратко, тотально y-ограничены с y_0-контролем, если для каждого неотрицательного числа $\alpha\in R$ существуют такие положительные числа $\beta(\alpha),\gamma(\alpha)\in R$, что для любой точки $(t_0,x_0)\in\Omega$, $\|y_0\|\le\alpha$ выполнено условие $\|y(t,x_0,t_0)\|<\beta$ при $t\ge t_0$, где $x=x(t,x_0,t_0)$ – произвольное решение системы (5), удовлетворяющей при $\alpha\le\|y\|\le\beta$ неравенству $\|M(t,x)\|\le\gamma$.

Для функции $G(t,y)$, $t\ge 0$, $y\in E$, где E – некоторая область в R^k, далее будем употреблять запись $G(t,y)\in L_t(y)$, если для любого ограниченного подмножества $B\subset E$, замыкание которого принадлежит E, существует такая постоянная Липшица L, зависящая от B, что для каждого $t\ge 0$ и любых $y,y'\in B$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(t,y)-G(t,y')|\le L|y-y'|.$$

Отметим, что из справедливости условия $G(t,y)\in L(t,y)$, вообще говоря, не следует справедливость условия $G(t,y)\in L_t(y)$.

Сформулируем и докажем теперь достаточный признак тотальной y-ограниченности с y_0-контролем решений системы (1) в терминах производной Дини.

Теорема 7. Пусть для системы (1) существует такая непрерывная и неотрицательная функция $V(t,y)$, определенная в области $t\ge 0$, $y\in R^k$, $\|y\|\ge R_0$, где $R_0>0$ – некоторое фиксированное число, что $V(t,y)\in L(t,y)$ и $V(t,y)\in L_t(y)$. Кроме того, пусть для указанной выше функции $V(t,y)$ выполнены следующие условия:

1) $b(\|y\|)\le V(t,y)\le a(\|y\|)$, где $a(r)>0$ и $b(r)\ge 0$ – непрерывные возрастающие функции и $b(r)\to\infty$ при $r\to\infty$;

2) $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x)\le -c(\|y\|)$ внутри области $t\ge 0$, $x\in R^n$, $\|y\|\ge R_0$, где $c(r)$ – некоторая непрерывная функция, положительная при $r>0$.

Тогда решения системы (1) тотально y-ограничены с y_0-контролем.

Доказательство. При помощи условия 1 точно так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, выберем для произвольного $\alpha>0$ такое число $\beta>\alpha$, что $b(\beta)>a(\alpha)$. Теперь требуется показать существование такого γ, что решения системы (5), правая часть которой в области $\alpha \le \|y\| \le \beta$ удовлетворяет условию $\|M(t,x)\| \le \gamma$, являются равномерно y-ограничены с y_0-контролем. Из теоремы 2 следует, что указанное выше число γ можно найти из требования справедливости условия $V'^{+}_{F(t,x)+H(t,x)}(t,x) \le 0$. Действительно, при $\alpha \le \|y\| \le \beta$ имеем

$$V'^{+}_{F(t,x)+H(t,x)}(t,x) = V'^{+}_{Y(t,x)+M(t,x)}(t,x) =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\left(\sup_{h\in(0;\alpha]} \frac{V(t+h, y+(Y(t,x)+M(t,x))h) - V(t,y)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \sup_{h\in(0;\alpha]} \frac{1}{h}\big(V(t+h, y+Y(t,x)h+M(t,x)h) -$$

$$-V(t+h, y+Y(t,x)h) + V(t+h, y+Y(t,x)h) - V(t,y)\big).$$

Так как $V(t,y) \in L_t(y)$, то получаем

$$\frac{V(t+h, y+Y(t,x)h+M(t,x)h) - V(t+h, y+Y(t,x)h)}{h} \le L\|M(t,x)\|,$$

где константа Липшица L выбрана для множества $B = \{y \in R^k \mid \alpha \le \|y\| \le \beta\}$. Из этого, учитывая неравенство $V'^{+}_{Y(t,x)}(t,x) \le -c(\|y\|)$, имеем

$$V'^{+}_{Y(t,x)+M(t,x)}(t,x) \le \lim_{\alpha\to+0}\left(\sup_{h\in(0;\alpha]} \frac{V(t+h, y+Y(t,x)h) - V(t,y)}{h}\right) + L\|M(t,x)\| =$$

$$= V'^{+}_{Y(t,x)}(t,x) + L\|M(t,x)\| \le -c(\|y\|) + L\|M(t,x)\|.$$

Ясно, что если $-c(\|y\|) + L\|M(t,x)\| \le 0$, то $V'^{+}_{Y(t,x)+M(t,x)}(t,x) \le 0$.

Определим число γ, полагая $\gamma = \min\limits_{\alpha\le\|y\|\le\beta} \dfrac{c(\|y\|)}{L}$.

Легко видеть, что если $\|M(t,x)\| \le \gamma$, то справедливо неравенство

$$V'^{+}_{F(t,x)+H(t,x)}(t,x) \le V'^{+}_{Y(t,x)+M(t,x)}(t,x) \le 0$$

и, следовательно, решения системы (5) являются равномерно y-ограниченными с y_0-контролем. Для завершения доказательства осталось только заметить, что число γ зависит от α, но не зависит от t_0, поскольку числа L и $\min c(\|y\|)$, где $\alpha \le \|y\| \le \beta$, зависят от α, но не зависят от t_0. Таким образом, показано, что при выполнении условий 1 и 2 решения системы (1) тотально y-ограничены с y_0-контролем. Теорема доказана.

Список литературы

1. **Yoshizawa, T**. Liapunovs function and boundedness of solutions / T. Yoshizawa // Funkcialaj Ekvacioj. – 1959. – Vol. 2. – P. 95–142 (Русский перевод: Математика : сборник переводов. – 1965. – № 5. – С. 95–127).
2. **Румянцев, В. В.** Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. – М. : Наука, 1987. – 255 с.
3. **Воротников, В. И.** К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем / В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 5. – С. 23–31.

References

1. Yoshizawa T. Funkcialaj Ekvacioj [Collection of translations “Mathematics”]. 1959, vol. 2, pp. 95–142.
2. Rumyantsev V. V., Oziraner A. S. *Ustoychivost' i stabilizatsiya dvizheniya otnositel'no chasti peremennykh* [Stability and stabilization of motion relative to variables]. Moscow: Nauka, 1987, 255 p.
3. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Bulletin of the Russian Academy of sciences. Control theory and systems]. 2010, no. 5, pp. 23–31.

Лапин Кирилл Сергеевич
аспирант, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева (г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

Lapin Kirill Sergeevich
Postgraduate student, Mordovia State University named after N. P. Ogaryov (Saransk, 68 Bolshevistskaya str.)

E-mail: klapin@mail.ru

УДК 517.925.51

Лапин, К. С.

Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями / К. С. Лапин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 120–132.